הנושא: **חקירת המשוואה הדו-ריבועית**

__הוכן ע"י__: עופר ליבה.

__תקציר__: המחבר מציג את הנושא: 'משוואה דו ריבועית'. בדרך כלל נלמדת רק השיטה הטכנית לפתרון משוואות כאלה.במאמר מוצגת חקירה מקיפה המובילה לסיווג של המשוואות הדו-ריבועיות לסוגים לפי מספר הפתרונות שלהן.

__מילות מפתח__: משוואה, משוואה ריבועית, משוואה דו-ריבועית, משוואה פרמטרית, דיסקרימיננטה, פתרונות של משוואה, פונקציה דו-ריבועית, גרף, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם ציר x.

__החומר פורסם במסגרת__: על"ה 38, תשס"ז 2007, עמודים 59-64.

__החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה__: 6 עמודים.

ale38-13

חקירת המשוואה הדו-ריבועית

עופר ליבה
opherel@netvision.net.il
מתימטיקה-לי®, מרכז להעשרה חינוכית, ירושלים

הקדמה

בפרק על חקירת משוואה ריבועית שבתוכנית הלימודים, ישנה התייחסות לשתי סוגיות:
א. קיום הפתרונות ומספרם (בין 0 ל-2).
ב. סימנם (חיוביות/שליליות) של הפתרונות.

ההתייחסות היא בסדר זה, כי, מן הסתם, יש טעם לקבוע את סימנם של הפתרונות רק כאשר הם קיימים. בסך הכל, העניין הוא פשוט יחסית, כי לסוגיה הראשונה ישנם שלושה מצבים וגם לסוגיה השנייה ישנם שלושה מצבים. בכל מקרה, קיומם של הפתרונות תלוי אך ורק בדיסקרימיננטה, וכאשר הדיסקרימיננטה היא חיובית, הסימן תלוי בסכום ובמכפלה. (בהמשך, נזכיר את העובדות בצורה מסודרת.)
לעומת זאת, כאשר אנו באים לקבוע את הקיום והמספר (בין 0 ל-4) של פתרונות של משוואה דו-ריבועית, אנו חייבים להתייחס ראשית לדיסקרימיננטה של משוואת ההמרה, ואם היא חיובית או אפס, יש להמשיך לחקור את סימני הפתרונות המשפיעים הן על הקיום והן על המספר של הפתרונות של המשוואה המקורית. (אנו נראה בהמשך שישנם לא פחות מתשעה מקרים!) השילוב הזה יוצר לדעתי עומק, ומעשיר באופן משמעותי את הדיון בנושאים: משוואה ריבועית ותכונותיה, משוואה דו-ריבועית, וכמובן חקירה של משוואה עם פרמטר.

משוואה ריבועית ב-R – סיכום עובדות מרכזיות

הצורה הכללית (וה"מסודרת") של משוואה ריבועית בנעלם ממשי t היא: $at^2+bt+c=0\ (a\neq 0)$
(כאשר המקדמים a, b ו- c הם מספרים ממשיים).
הדיסקרימיננטה של המשוואה היא: $\Delta=b^2-4ac$.

אנו יודעים:
א. אם $\Delta>0$ ישנם שני פתרונות למשוואה, וקבוצת-האמת היא:

$$S=\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

(בכל המאמר, S תסמן קבוצת אמת.)
במקרה זה, סכום הפתרונות הוא $-\frac{b}{a}$ ומכפלת הפתרונות היא $\frac{c}{a}$.

- אם $-\frac{b}{a}>0$ וגם $\frac{c}{a}>0$, שני הפתרונות חיוביים.
- אם $-\frac{b}{a}<0$ וגם $\frac{c}{a}>0$, שני הפתרונות שליליים.
- אם $\frac{c}{a}<0$ (ואז בהכרח $\Delta>0$), שני הפתרונות שוני סימן. (b יכול להיות 0).
- אם $c=0$ וגם $b\neq 0$, ישנם שני פתרונות למשוואה, שאחד מהם הוא 0.

ב. אם $\Delta=0$, יש פתרון אחד ויחיד למשוואה, $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$. נזכיר שבמקרה זה, נוכל *תמיד* לרשום את המשוואה כך: $a\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2=0$.

ג. אם $\Delta<0$, אין פתרון ממשי למשוואה, $S=\varnothing$ (b יכול להיות 0).

<u>הערות</u>
א. כל משוואה ריבועית ניתן לרשום כך: $t^2+bt+c=0$ ואז $\Delta=b^2-4c$,

ואז:

➢ אם $\Delta>0$, $S=\left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}\ ,\ \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}\right\}$

➢ אם $\Delta=0$, $S=\left\{\dfrac{-b}{2}\right\}$

ב. אם נרשום את המשוואה כך:

$at^2+2bt+c=0\ \ (a\neq 0)$

ונסמן $\frac{1}{4}\Delta=\delta=b^2-ac$, אז:

➢ אם $\delta>0$, $S=\left\{\dfrac{-b+\sqrt{\delta}}{a}\ ,\ \dfrac{-b-\sqrt{\delta}}{a}\right\}$

➢ אם $\delta=0$, $S=\left\{\dfrac{-b}{a}\right\}$

משוואה דו-ריבועית ב-R

הצורה הכללית של משוואה דו-ריבועית בנעלם ממשי x היא:

$ax^4+bx^2+c=0\ \ (a\neq 0)$

נציב $x^2=t\geq 0$ ונקבל משוואה ריבועית בנעלם t:

$at^2+bt+c=0\ \ (a\neq 0)$

משוואה זו תיקרא בהמשך *משוואת ההמרה*.

את מספר הפתרונות של המשוואה הדו-ריבועית נוכל לקבוע אם-כן על-פי קיומם וסימנם של פתרונות משוואת ההמרה.

אפס פתרונות

לאפשרות זו יש שלושה מקרים:

א. אין פתרון כלל למשוואת ההמרה, כלומר $\Delta<0$

לדוגמא: $x^4+x^2+1=0$, $S=\varnothing$.

ב. למשוואת ההמרה יש פתרון יחיד, אך הוא שלילי, כלומר $\Delta=0$ וגם $\frac{-b}{2a}<0$.

לדוגמא: $4x^4+4x^2+1=0$, $S=\varnothing$.

ג. למשוואת ההמרה יש שני פתרונות, אך שניהם שליליים, כלומר $\Delta>0$ וגם $\frac{-b}{a}<0$ וגם $\frac{c}{a}>0$.

לדוגמא: $x^4+3x^2+2=0$, $S=\varnothing$.

פתרון אחד

לאפשרות זו יש שני מקרים, ובשניהם הפתרון היחיד הוא 0:

ד. $b=c=0$

לדוגמא: $-2x^4=0$, $S=\{0\}$

ה. $c=0$ וגם $\frac{-b}{a}<0$

לדוגמא: $3x^4+2x^2=0$, $S=\{0\}$

שני פתרונות

לאפשרות זו יש שני מקרים:

ו. למשוואת ההמרה יש פתרון יחיד וחיובי, כלומר $\Delta=0$ וגם $\frac{-b}{2a}>0$.

לדוגמא: $x^4-6x^2+9=0$, $S=\{\sqrt{3}\ ,\ -\sqrt{3}\}$

באופן כללי: $S=\left\{\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\ ,\ -\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right\}$

ז. למשוואת ההמרה יש שני פתרונות שוני סימן, כלומר $\frac{c}{a}<0$.

לדוגמא: $x^4-x^2-2=0$, $S=\{\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2}\}$

באופן כללי:

$$a>0: S=\left\{\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}\ ,\ -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}\right\}$$

$$a<0: S=\left\{\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}\ ,\ -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}\right\}$$

שלושה פתרונות

לאפשרות זו ישנו מקרה אחד:

ח. $c=0$ וגם $\frac{-b}{a}>0$. (אחד הפתרונות הוא 0 והשני חיובי.)

לדוגמא: $x^4-2x^2=0$, $S=\{\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2}\ ,\ 0\}$

באופן כללי: $S=\left\{\sqrt{-\dfrac{b}{a}}\ ,\ -\sqrt{-\dfrac{b}{a}}\ ,0\right\}$

ארבעה פתרונות

הדבר יקרה אך ורק כאשר למשוואת ההמרה ישנם שני פתרונות חיוביים, כלומר:

ט. $\Delta>0$ וגם $-\frac{b}{a}>0$ וגם $\frac{c}{a}>0$.

לדוגמא:

$x^4-4x^2+3=0$, $S=\{\sqrt{3}\ ,-\sqrt{3}\ ,1,-1\}$

באופן כללי:

$$S=\left\{\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}\ ,-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}\ ,\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}\ ,-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}\right\}$$

כדי לנתח בצורה נוחה את המשוואות הפרמטריות שנציג בדוגמאות, נרכז את הממצאים בטבלה (sign (a) הוא הסימן של a – חיובי או שלילי):

מקרה	מספר פתרונות	תנאים	קבוצת האמת
א	0	$\Delta<0$	$\varnothing$
ב	0	$\Delta=0\,,-\frac{b}{a}<0$	$\varnothing$
ג	0	$\Delta>0,\frac{c}{a}>0,-\frac{b}{a}<0$	$\varnothing$
ד	1	$b=c=0$	$\{0\}$
ה	1	$c=0\,,-\frac{b}{a}<0$	$\{0\}$
ו	2	$\Delta=0\,,-\frac{b}{a}>0$	$\left\{\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right\}$
ז	2	$(\Delta>0)\,,\frac{c}{a}<0$	$\left\{\pm\sqrt{\frac{-b+sign(a)\sqrt{\Delta}}{2a}}\right\}$
ח	3	$c=0\,,-\frac{b}{a}>0$	$\left\{\pm\sqrt{-\frac{b}{a}},0\right\}$
ט	4	$\Delta>0,\frac{c}{a}>0,-\frac{b}{a}>0$	$\left\{\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}\right\}$

<u>הערות</u>

א. במשוואה פרמטרית, יתכן מצב שבו $a=0$, ואז המשוואה היא ריבועית. בחלק מהדוגמאות תופיע האפשרות הזו.

ב. אם נרשום את המשוואה כך: $x^4+bx^2+c=0$ נוכל לערוך טבלה פשוטה יותר:

מקרה	מספר פתרונות	תנאים	קבוצת האמת
א	0	$\Delta<0$	$\varnothing$
ב	0	$\Delta=0\,,b>0$	$\varnothing$
ג	0	$\Delta>0,c>0,b>0$	$\varnothing$
ד	1	$b=c=0$	$\{0\}$
ה	1	$c=0\,,b>0$	$\{0\}$
ו	2	$\Delta=0\,,b<0$	$\left\{\pm\sqrt{-\frac{1}{2}b}\right\}$
ז	2	$(\Delta>0)\,,c<0$	$\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-b+\sqrt{\Delta})}\right\}$
ח	3	$c=0\,,b<0$	$\left\{\pm\sqrt{-b}\,,0\right\}$
ט	4	$\Delta>0,c>0,b<0$	$\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-b\pm\sqrt{\Delta})}\right\}$

דוגמאות לחקירה של משוואה דו-ריבועית עם פרמטר אחד

הערות מקדימות

- כיוון שהמאמר איננו על אי-שוויונים, וכדי להציג מבחר רב ומגוון של דוגמאות, אנו לא נפרט את שלבי הפתרון של האי-שוויונים. הקורא מוזמן להשלים את החסר.
- כדי ליהנות מלמידה משמעותית, הדוגמאות נבנו כך שכל אחת מהן היא ייחודית לעומת האחרות, מבחינת המקרים (מתוך התשעה) שהיא מכסה, הסיכום בטבלה אחת או שתיים, האפשרות למשוואה ריבועית, פשטות ומורכבות של הניתוח, וכיו"ב.
- את קבוצת-האמת נרשום רק כאשר הפרמטר מקבל ערך מספרי מסויים.

<u>דוגמא ראשונה</u>

$$(m-2)x^4-2mx^2+m+1=0$$

משוואה זו היא ריבועית כאשר $m=2$. במקרה זה:

$-4x^2+3=0$ ואז $S=\left\{\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

אם $m\neq 2$, $(\delta=m+2)\tilde{\Delta}=4m+8$, והמקרים הם:

א. (0 פתרונות) קורה כאשר $m<-2$.

ב. (0) לא קורה כאן.

ג. (0) לא קורה כאן.

ד. (1) לא קורה כאן.

ה. (1) לא קורה כאן.

ו. (2) קורה עבור $m=-2$, ואז המשוואה היא $4x^4-4x^2+1=0$ או $(2x^2-1)^2=0$,

ואז $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right\}$

ז. (2) קורה עבור $-1<m<2$.

ח. (3) קורה עבור $m=-1$, ואז המשוואה היא $-3x^4+2x^2=0$ או $x^2(-3x^2+2)=0$

ואז $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{-\sqrt{2}}{3}\right\}$

ט. (4) קורה עבור $m>2$ או $-2<m<-1$.

סיכום החקירה לפי מספר הפתרונות:

מספר הפתרונות	ערכי הפרמטר ***m***
0	$m<-2$
2	$m=-2,\ -1<m\leq 2$
3	$m=-1$
4	$m>2,-2<m<-1$

סיכום החקירה לפי ערכי הפרמטר:

ערכי הפרמטר m	מספר הפתרונות
$m<-2$	0
$m=-2$	2
$-2<m<-1$	4
$m=-1$	3
$-1<m\le 2$	2
$m>2$	4

<u>דוגמא שניה</u>

$$x^4-(m+1)x^2+2(m-1)=0$$

$\Delta=(m-3)^2$, והמקרים הם:

א. (0 פתרונות) לא קורה כאן.
ב. (0) לא קורה כאן.
ג. (0) לא קורה כאן.
ד. (1) לא קורה כאן.
ה. (1) לא קורה כאן.
ו. (2) קורה עבור $m=3$, ואז המשוואה היא $x^4-4x^2+4=0$ או $(x^2-2)^2=0$, ואז $S=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$.
ז. (2) קורה עבור $m<1$.
ח. (3) קורה עבור $m=1$, ואז המשוואה היא $x^4-2x^2=0$ או $x^2(x^2-2)=0$ ואז $S=\{\sqrt{2},-\sqrt{2},0\}$.
ט. (4) קורה עבור $1<m\ne 3$.

סיכום החקירה לפי מספר הפתרונות:

מספר הפתרונות	ערכי הפרמטר m
2	$m<1$, $m=3$
3	$m=1$
4	$1<m\ne 3$

סיכום החקירה לפי ערכי הפרמטר:

ערכי הפרמטר m	מספר הפתרונות
$m<1$	2
$m=1$	3
$1<m<3$	4
$m=3$	2
$m>3$	4

<u>דוגמא שלישית</u>

$$x^4-2mx^2+m^2-m+2=0$$

$\Delta=4m-8$ $(\delta=m-2)$, והמקרים הם:

א. (0 פתרונות) קורה עבור $m<2$.
ב. (0) לא קורה כאן.
ג. (0) לא קורה כאן.
ד. (1) לא קורה כאן.
ה. (1) לא קורה כאן.
ו. (2) המשוואה היא $x^4-4x^2+4=0$ או $(x^2-2)^2=0$ ואז $S=\{\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2}\}$
ז. (2) לא קורה כאן.
ח. (3) לא קורה כאן.
ט. (4) קורה עבור $m>2$.

סיכום החקירה לפי מספר הפתרונות ולפי ערכי הפרמטר (אין צורך כאן בשתי טבלאות נפרדות):

מספר הפתרונות	ערכי הפרמטר *m*
0	$m<2$
2	$m=2$
4	$m>2$

<u>דוגמא רביעית</u>

$$x^4-2mx^2-m=0$$

$\Delta=4m^2+4m$, $(\delta=m^2+m)$, והמקרים בהם:

א. (0 פתרונות) קורה עבור $-1<m<0$.
ב. (0) קורה עבור $m=-1$, ואז המשוואה היא: $x^4+2x^2+1=0$ או $(x^2+1)^2=0$, ואז $S=\emptyset$.
ג. (0) קורה עבור $m<-1$.
ד. (1) קורה עבור $m=0$ ואז המשוואה היא $x^4=0$ ואז $S=\{0\}$.
ה. (1) לא קורה כאן.
ו. (2) לא קורה כאן.
ז. (2) קורה עבור $m>0$.
ח. (3) לא קורה כאן.
ט. (4) לא קורה כאן.

סיכום החקירה לפי מספר הפתרונות ולפי ערכי הפרמטר (גם כאן אין צורך בשתי טבלאות נפרדות):

מספר הפתרונות	ערכי הפרמטר *m*
0	$m<0$
1	$m=0$
2	$m>0$

דוגמא חמישית

$$x^4-2(m+1)x^2+(m+1)^2=0$$

את המשוואה ניתן לרשום כך: $(x^2-(m+1))^2=0$,
ולכן, במקרה זה, אין צורך לעבוד לפי הסעיפים. נוכל מייד לסכם:

מספר הפתרונות	ערכי הפרמטר **m**
0	$m<-1$
1	$m=-1$
2	$m>-1$

דוגמא שישית

$$x^4-2(m^2+1)x^2+(m^2-1)^2=0$$

$\Delta=16m^2, (\delta=4m^2)$, והמקרים הם:

א. (0 פתרונות) לא קורה כאן .
ב. (0) לא קורה כאן.
ג. (0) לא קורה כאן.
ד. (1) לא קורה כאן.
ה. (1) לא קורה כאן.
ו. (2) קורה עבור $m=0$ ואז המשוואה היא $x^4-2x^2+1=0$ או $(x^2-1)^2=0$ ואז $S=\{1,-1\}$.
ז. (2) לא קורה כאן.
ח. (3) קורה עבור $m=1$ או $m=-1$, ואז המשוואה היא $x^4-4x^2=0$ או $x^2(x^2-4)=0$ ואז $S=\{0,2,-2\}$.
ט. (4) קורה עבור $m\neq 0,1,-1$

סיכום החקירה לפי מספר הפתרונות:

מספר הפתרונות	ערכי הפרמטר **m**
2	$m=0$
3	$m=1,-1$
4	$m\neq 0,1-1$

דוגמא שביעית

$$mx^4-4x^2+m=0$$

משוואה זו היא ריבועית כאשר $m=0$, ואז היא נרשמת $-4x^2=0$, ואז $S=\{0\}$.

אם $m\neq 0$, $\Delta=16-4m^2, (\delta=4-m^2)$ והמקרים הם:

א. (0 פתרונות) קורה עבור $m>2$ או $m<-2$.
ב. (0) קורה עבור $m=-2$ ואז המשוואה היא $-2x^4-4x^2-2=0$ או $(x^2+1)^2=0$ ואז $S=\varnothing$.
ג. (0) קורה עבור $-2<m<0$.
ד. (1) לא קורה כאן.
ה. (1) לא קורה כאן.
ו. (2) קורה עבור $m=2$, ואז המשוואה היא $2x^4-4x^2+2=0$ או $(x^2-1)^2=0$ ואז $S=\{1,-1\}$.
ז. (2) לא קורה כאן.
ח. (3) לא קורה כאן.
ט. (4) קורה עבור $0<m<2$.

סיכום החקירה לפי מספר הפתרונות:

מספר הפתרונות	ערכי הפרמטר **m**
0	$m>2\,,m<0$
1	$m=0$
2	$m=2$
4	$0<m<2$

סיכום החקירה לפי ערכי הפרמטר:

ערכי הפרמטר **m**	מספר הפתרונות
$m<0$	0
$m=0$	1
$0<m<2$	4
$m=2$	2
$m>2$	0

דוגמא שמינית

$$(m-1)x^4-2(m+1)x^2+(2m-1)=0$$

משוואה זו היא ריבועית כאשר $m=1$, ואז היא נרשמת $-4x^2+1=0$, ואז $S=\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$.

אם $m\neq 1$, $\Delta=-4m^2+20m, (\delta=(-m^2+5m)$
והמקרים הם:

א. (0 פתרונות) קורה עבור $m>5$ או $m<0$.
ב. (0) קורה עבור $m=0$, ואז המשוואה היא $-x^4-2x^2-1=0$ או $(x^2+1)^2=0$ ואז $S=\varnothing$.
ג. (0) קורה עבור $0<m<\frac{1}{2}$.
ד. (1) לא קורה כאן.
ה. (1) קורה עבור $m=\frac{1}{2}$, ואז המשוואה היא $-\frac{1}{2}x^4-3x^2=0$ או $x^2(x^2+6)=0$ ואז $S=\{0\}$.

ו. (2) קורה עבור $m=5$, ואז המשוואה היא $4x^4-12x^2+9=0$ או $(2x^2-3)^2=0$ ואז

$$S=\left\{\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$

ז. (2) קורה עבור $\frac{1}{2}<m<2$.

ח. (1) לא קורה כאן.

ט. (4) קורה עבור $1<m<5$.

סיכום החקירה לפי מספר הפתרונות:

מספר הפתרונות	ערכי הפרמטר *m*
0	$m<\frac{1}{2}, m>5$
1	$m=\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}<m\le 1, m=5$
4	$1<m<5$

סיכום החקירה לפי ערכי הפרמטר:

ערכי הפרמטר m	מספר הפתרונות
$m<\frac{1}{2}$	0
$m=\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}<m\le 1$	2
$1<m<5$	4
$m=5$	2
$m>5$	0

הערות דידאקטיות

הטיפול בנושא זה דורש, כמובן, ידע טוב במשוואה ריבועית, נוסחאות וייאטה, חקירת משוואה ריבועית עם פרמטר אחד (קיום הפתרונות, סימן הפתרונות), משוואה דו-ריבועית ופתרון אי-שוויונים. ניתן על כן להציע אותו עם סיום הטיפול בכל הנושאים שצויינו כנושא העשרה בכיתה סקרנית, או ללמידה עצמית, או כעבודה והרצאת-תלמיד.

אין צורך לדעתי שתלמיד יידע את הטבלה של המקרים האפשריים בעל-פה. לעומת זאת, חשוב שתהליך בנייתה יתבצע תוך דו-שיח פעיל בין המורה לכיתה. (כלומר לא לתת אותה כמתכון "מוכן".) לאחר מכן, ביישומים, ניתן בהחלט לעבוד לפי הטבלה, סעיף-סעיף.

לאחר טיפול מסודר והפנמה טובה של הנושא, ניתן "להלביש" אותו על חקירה של *פונקציות* דו-ריבועיות עם פרמטר אחד. (במקרה זה ניתן לעבוד גם עם תוכנת מחשב מתאימה או עם מחשבון גראפי, במקביל לטיפול האנליטי-אלגברי.) הנושא שהצגנו במאמר יתאים כפי שהוא למציאת נקודות המפגש של הגרף עם ציר ה-x. השלבים האנליטיים של חקירת פונקציה דו-ריבועית הם פשוטים למדי, ולכן נציג כאן רק את סיכום העובדות:

א. הפונקציה הדו-ריבועית $f(x)=ax^4+bx^2+c$ היא זוגית, ולכן הגרף שלה סימטרי ביחס לציר ה-y.

ב. אם $a>0$ ה'זרועות' של הגרף מופנות כלפי מעלה, ואם $a<0$ הן מופנות כלפי מטה.

ג. אם $-\frac{b}{a}\le 0$, יש נקודת קיצון אחת: $(0,c)$ ואם $-\frac{b}{a}>0$, יש שלוש נקודות קיצון:

$$(0,c),\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\ ,\ -\frac{\Delta}{4a}\right),\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\ ,\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$